

Informe para el proyecto *Tools and Practices For Business Cycle Analysis in National Statistical Institutes of EU (BUSY). WPI: Reviewing and evaluating statistical methods for dating.*

**FLUCTUACIONES ECONOMICAS,
PUNTOS DE GIRO Y
CLASIFICACION CICLICA¹**

Ana M^a Abad
Alfredo Cristóbal
Enrique M. Quilis

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA

Octubre 2000

¹ Las opiniones expuestas en este trabajo son de los autores y no corresponden, de forma necesaria, con las del INE. Se agradecen los comentarios de Juan Bógalo.

CONTENIDO

1. Introducción
2. Identificación de puntos de giro: métodos empiristas
 - 2.1. El procedimiento de Bry-Boschan
 - 2.2. El procedimiento $\langle F \rangle$
3. Identificación de puntos de giro: métodos basados en modelos
 - 3.1. Autorregresiones por umbrales (TAR)
 - 3.2. Autorregresiones con régimen cambiante Markoviano (MS-AR)
4. Clasificación cíclica: métodos bivariantes
 - 4.1. El procedimiento $\langle G \rangle$
 - 4.2. Clasificación cíclica mediante la función de correlación cruzada
 - 4.3. Clasificación cíclica mediante la función de coherencia espectral
5. Clasificación cíclica: métodos multivariantes
6. Conclusiones

1. INTRODUCCION

Fluctuaciones, puntos de giro y clasificación cíclica son tres conceptos clave para el analista de la coyuntura. Las fluctuaciones o ciclos económicos constituyen la materia prima del coyunturista, de forma que dedica gran parte de su tiempo a su estimación, valoración y predicción.

Los puntos de giro son acontecimientos especialmente relevantes en el desenvolvimiento habitual de los ciclos, de forma que su presencia señala cambios de fase en la coyuntura económica que han de ser examinados con especial atención, previstos con la máxima precisión y analizadas sus implicaciones con todo detalle.

Por último, la clasificación cíclica es una labor que amplía sustancialmente el conocimiento del analista sobre el sistema económico, de manera que puede explicar con mayor fundamento el comportamiento de las variables analizadas y elaborar predicciones y diagnósticos más precisos. En este sentido, el uso de indicadores adelantados puede ser de gran ayuda.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la segunda sección se analizan dos métodos para identificar los puntos de giro de una serie temporal mediante el uso de métodos empíricos o no paramétricos. Ambos comparten el uso de filtros lineales así como la codificación mediante programas de ordenador de las reglas de decisión que los analistas del ciclo han venido utilizando para detectar puntos de giro.

A continuación, se examinan dos modelos no lineales de series temporales que permiten una definición explícita del concepto de punto de giro así como una cuantificación de su verosimilitud. Estos modelos conciben el fenómeno cíclico como un elemento consustancial al mecanismo de propagación de los *shocks*.

La cuarta sección está dedicada a la clasificación cíclica bivariante. Uno de los usos más comunes de las cronologías cíclicas consiste en la detección de relaciones de desfase entre indicadores, de manera que algunos puedan servir como índices adelantados y permitan la identificación temprana de cambios de fase en la coyuntura económica. Esta tarea de identificación dinámica también puede realizarse mediante el análisis de las funciones de correlación cruzada y de coherencia espectral, que también son expuestas.

Finalmente, en la quinta sección, se presenta un método multivariante de clasificación cíclica basado en un modelo factorial dinámico. Este modelo permite identificar patrones comunes de evolución, desfases así como el diseño de índices sintéticos de adelanto, coincidencia y retraso.

El trabajo concluye evaluando los distintos métodos y ofreciendo una guía estructurada de análisis que permita la aplicación habitual de estas técnicas en el análisis de la coyuntura y el ciclo así como el desarrollo de herramientas informáticas útiles para dicho análisis.

Antes de iniciar la exposición conviene advertir que, como resultado de la división de tareas dentro del proyecto BUSY, la estimación del componente cíclico no será examinada en este trabajo. No obstante, el lector interesado puede consultar Melis (1983), Gómez (1998), Kaiser y Maravall (1999), entre otros.

2. IDENTIFICACION DE PUNTOS DE GIRO: MÉTODOS EMPIRISTAS

El análisis empirista de los puntos de giro consiste en la identificación de dichos puntos mediante un conjunto de reglas de decisión que reflejan la experiencia práctica acumulada por los analistas del ciclo así como sus nociones *a priori* acerca de la naturaleza de las fluctuaciones económicas.

En este tipo de análisis no se emplean modelos estadístico-econométricos explícitos para representar a la serie que se desea analizar. Por el contrario, se adopta una perspectiva bastante amplia que se concentra en las propiedades finales, observables, de la serie cuyos puntos de giro se desea fechar. Este carácter no paramétrico es, al mismo tiempo, una ventaja y un inconveniente. La ventaja se deriva de la simplicidad de su aplicación y del hecho de que no emplean premisas discutibles, por lo que resultan más neutrales y fáciles de aceptar por analistas con orientaciones teóricas diferentes. El inconveniente se deriva de la dificultad para realizar inferencias con estos métodos tales como, por ejemplo, generar predicciones sobre la ocurrencia de un punto de giro.

Los métodos empiristas utilizan en grados diversos una combinación de técnicas de filtrado lineal, para obtener una señal cíclica suficientemente exenta de irregularidad, y de algoritmos de búsqueda para identificar los máximos y mínimos cíclicos.

Finalmente, estos métodos suelen aparecer codificados como programas informáticos dotados de una parametrización relativamente estricta. A continuación se exponen dos de estos programas: Bry y Boschan (1971) y <F> (Abad y Quilis, 1996, 1997). Otros métodos pueden examinarse en Boldin (1994) y Chin *et al.* (2000).

2.1. El procedimiento de Bry-Boschan

La metodología del National Bureau of Economic Research (NBER) para el análisis del ciclo económico se basa, de forma crucial, en la identificación univariante de los puntos de giro de las series temporales objeto de estudio. En el clásico trabajo de Burns y Mitchell (1947) la detección de tales puntos se realizó examinando cuidadosamente las representaciones gráficas de las series e incorporando las consideraciones *a priori* respecto al comportamiento cíclico que se había destilado en el NBER desde que esta institución comenzara su estudio sistemático de las fluctuaciones económicas. Debe enfatizarse que tales consideraciones reflejaban nociones de tipo estadístico, puramente instrumentales pero no concepciones emanadas de la teoría económica. De esta forma, el análisis del NBER constituye la primera expresión de lo que, en la década de los ochenta, se conocería como “macroeconomía empírica”.

Naturalmente, la réplica del proceso de fechado seguido por Burns y Mitchell requería la codificación de sus reglas de decisión en un marco formal, susceptible de representación computacional, de forma que pudiera ser aplicado por analistas distintos de manera intersubjetiva. El trabajo de Bry y Boschan (1971) es, precisamente, la codificación más conocida de los métodos de fechado de Burns y Mitchell.

El método de Bry y Boschan consiste en la aplicación sucesiva de un algoritmo de identificación de puntos de giro a una secuencia de series filtradas, evolucionando el grado de suavidad de mayor a menor. Así, se utiliza en primer lugar una media móvil de 12 términos (MM(12)), a continuación un filtro de Spencer, después una media móvil de 3 términos (MM(3)) y, finalmente, la serie original sin suavizar. Los puntos de giro finales son determinados en esta última serie, manteniendo la coherencia con los que se han determinado previamente en sus versiones suavizadas y asegurando el cumplimiento de una serie de restricciones, destacando que las duraciones totales y parciales de los ciclos han de ser, como mínimo, de 16 y de 6 meses, respectivamente.

Asimismo, debe resaltarse que la serie de partida a la que se aplica el procedimiento debe carecer de oscilaciones estacionales, bien por su propia naturaleza bien por haber sido sometida a un proceso de desestacionalización.

Los tres filtros que emplea el método de Bry y Boschan son casos particulares de un filtro de media móvil simétrico de la forma:

$$[2.1] \quad H(B) = \sum_{j=-s}^s h_j B^j \quad \text{con } h_j = h_{-j} \quad \forall j$$

siendo $h_j=1/25$ para MM(12), $h_j=1/5$ para MM(3) y $h=[0.2313, 0.2094, 0.1438, 0.0656, 0.0094, -0.0156, -0.0188, -0.0094]$ para el filtro de Spencer.

Las principales etapas del procedimiento de Bry y Boschan son:

- a. Determinación de extremos y sustitución de los mismos.
- b. Determinación de los ciclos en la serie MM(12), previa eliminación de extremos.
 - b.1. Identificación de máximos y mínimos locales en un entorno con un radio de 5 meses.
 - b.2. Asegurar la correcta alternancia de los puntos de giro, seleccionando el mayor de los diversos máximos (el menor de los diversos mínimos).
- c. Determinación de los correspondientes puntos de giro en la curva de Spencer (previa eliminación de extremos).
 - c.1. Identificación del mayor (o menor) valor en un entorno de ± 5 meses de los puntos de giro seleccionados previamente en la serie MM(12).
 - c.2. Cumplimiento de una duración mínima de los ciclos de 15 meses, eliminando los menores máximos y los mayores mínimos que definen ciclos menores.
- d. Determinación de los correspondientes puntos de giro en la serie MM(3) o MM(6), dependiendo del cociente MCD (*months for cyclical dominance*, meses requeridos para el dominio cíclico).
 - d.1. Identificación del mayor (o menor) valor en un entorno de ± 5 meses de los puntos de giro seleccionados previamente en la curva de Spencer.
- e. Determinación de los puntos de giro en la serie no suavizada.
 - e.1. Identificación del mayor (o menor) valor en un entorno de ± 4 meses (o de MCD meses, dependiendo de cuál sea mayor) de los puntos de giro seleccionados previamente en la serie MM(3) (o MM(6)).
 - e.2. Eliminación de los puntos de giro que se encuentran a menos de 6 meses del comienzo y del final de la serie.
 - e.3. Eliminación de los máximos (o mínimos) que son menores (mayores) que los valores próximos a los extremos.
 - e.4. Eliminación de los ciclos cuya duración es inferior a 15 meses.
 - e.5. Eliminación de las fases cuya duración es inferior a 5 meses.
- f. Presentación final de los puntos de giro identificados.

En el procedimiento de Bry y Boschan existen tres elementos fundamentales: (a) una identificación preliminar de los puntos de giro en la serie MM(12), (b) una proyección temporal de dichos puntos sobre secuencia de series transformadas mediante filtros de paso bajo hasta llegar a la serie no transformada y (c) la imposición final de todas las restricciones de duración y ubicación tendentes a asegurar que los puntos de giro identificados son compatibles con la definición habitual de ciclo.

2.2 El procedimiento <F>

El procedimiento <F> es un algoritmo de identificación empirista de puntos de giro que utiliza como *input* una señal cíclica pura, esto es, libre de la influencia de elementos irregulares. Este

procedimiento determina los puntos de giro detectando en dicha señal los máximos y mínimos locales que satisfagan dos restricciones fundamentales:

- a. Que la distancia entre dos puntos de giro del mismo tipo (p.e., dos máximos cíclicos) sea, como mínimo, L meses.
- b. Que la distancia entre dos puntos de giro del distinto tipo (p.e., un máximo y un mínimo cíclico) sea, como mínimo, M meses.

Este procedimiento ha sido codificado en el lenguaje Pascal con el fin de facilitar su aplicación sistemática y ofrecer una cronología tentativa para el análisis del ciclo, véase Abad y Quilis (1996, 1997) para una descripción detallada. El proceso completo de fechado puede ser formalizado de la manera siguiente:

$$[2.2] \quad f_t = \langle F \rangle c_t = \langle F_5 \rangle \langle F_6 \rangle \langle F_5 \rangle \langle F_4 \rangle \langle F_3 \rangle \langle F_2 \rangle \langle F_1 \rangle c_t$$

donde c_t es la señal cíclica estimada según los procedimientos antes comentados, f_t es la serie indicadora de la presencia y tipo de un punto de giro y $\langle F_i \rangle$ son los filtros (no lineales, por lo general) que, aplicados en cascada, determinan el fechado. La secuencia opera de derecha a izquierda, comenzando por un fechado preliminar muy poco restrictivo para ir imponiendo progresivamente condiciones más exigentes. La serie de fechado final debe verificar:

$$[2.3] \quad f_t = \begin{cases} 1 \leftrightarrow c_t = \max[c_{t-L} \cdot c_{t+L}] \\ -1 \leftrightarrow c_t = \min[c_{t-L} \cdot c_{t+L}] \\ 0 \quad \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y

$$[2.4] \quad f_t f_{t \pm s} = 0 \quad s = 1..M$$

Esta dos condiciones hacen referencia, respectivamente, a las duraciones totales y parciales que han de tener los ciclos identificados mediante el procedimiento $\langle F \rangle$. Por defecto, $L=16$ meses y $M=6$ meses.

Cada uno de los filtros $\langle F_i \rangle$ está encapsulado en un procedimiento Pascal cuya mecánica interna se describe a continuación:

$$[2.5] \quad f_{1,t} = \langle F_1 \rangle c_t$$

donde:

$$f_{1,t} = \begin{cases} 1 \leftrightarrow c_t = \max[c_{t-1} \cdot c_{t+1}] \\ -1 \leftrightarrow c_t = \min[c_{t-1} \cdot c_{t+1}] \\ 0 \quad \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Este es un fechado preliminar muy poco restrictivo y que identifica los puntos de giro como máximos o mínimos en un entorno de dimensión mínima. Los siguientes procedimientos refinan este fechado.

$$[2.6] \quad f_{2,t} = \langle F_2 \rangle f_{1,t}$$

donde:

$$f_{2,t} = \begin{cases} f_{1,t} \leftrightarrow t \in [1 + L_1 \dots n - L_2] \\ 0 \text{ en los demás casos} \end{cases}$$

En esta etapa se suprimen los puntos de giro que aparecen en los extremos de la serie. Por defecto, $L_1=6$ y $L_2=3$.

$$[2.7] \quad f_{3,t} = \langle F_3 \rangle f_{2,t}$$

donde:

$$f_{3,t} = \begin{cases} 0 \leftrightarrow (f_{2,t} = 1) \text{ y } (C_1 \geq \dots \geq C_{1+L_3}) \\ \quad (C_t \leq m_1) \text{ y } t \in [1 \dots 1 + L_4] \\ 0 \leftrightarrow (f_{2,t} = -1) \text{ y } (C_1 \leq \dots \leq C_{1+L_3}) \\ \quad (C_t \geq m_1) \text{ y } t \in [1 \dots 1 + L_4] \\ 0 \leftrightarrow (f_{2,t} = 1) \text{ y } (C_{n-L_4} \leq \dots \leq C_n) \\ \quad (C_t \leq m_2) \text{ y } t \in [n - L_4 \dots n] \\ 0 \leftrightarrow (f_{2,t} = -1) \text{ y } (C_{n-L_4} \geq \dots \geq C_n) \\ \quad (C_t \leq m_2) \text{ y } t \in [n - L_4 \dots n] \\ f_{2,t} \quad \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Siendo M_1 y M_2 los promedios de las L_3 primeras y últimas observaciones de C_t , respectivamente.

En esta fase se eliminan los puntos de giro que son menores (en valor absoluto) que los valores (promedio) próximos a los extremos y que además están inscritos en una trayectoria monótona. Por defecto, $L_3=2$ y $L_4=8$.

$$[2.8] \quad f_{4,t} = \langle F_4 \rangle f_{3,t}$$

donde:

$$f_{4,t} = \begin{cases} f_{3,t} \leftrightarrow c_t = (f_{3,t} = 1) \text{ y } c_t = \max[c_{t-L} \dots c_{t+L}] \\ f_{3,t} \leftrightarrow c_t = (f_{3,t} = -1) \text{ y } c_t = \min[c_{t-L} \dots c_{t+L}] \\ 0 \quad \text{en los demás casos} \end{cases}$$

En esta fase se impone la condición de que la duración total de los ciclos identificados ha de ser, como mínimo, de L meses. Por defecto $L=16$.

$$[2.9] \quad f_{5,t} = \langle F_5 \rangle f_{4,t}$$

donde:

$$f_{5,t} = \begin{cases} -1 \leftrightarrow (f_{4,v} = f_{4,s} = 1) \text{ y } (f_{4,t} = 0 \quad \forall t \in [v+1..s-1]) \\ 1 \leftrightarrow (f_{4,v} = f_{4,s} = -1) \text{ y } (f_{4,t} = 0 \quad \forall t \in [v+1..s-1]) \\ f_{4,t} \quad \text{en los demás casos} \end{cases}$$

siendo $f_{4,v}$ y $f_{4,s}$, respectivamente, los puntos de giro anterior y posterior a $f_{4,t}$. Este procedimiento garantiza la coherencia de la secuencia obtenida, de forma que siempre exista un máximo (mínimo) entre dos mínimos (máximos).

$$[2.10] \quad f_{6,t} = \langle F_6 \rangle f_{5,t}$$

donde:

$$f_{6,t} = \begin{cases} 0 \leftrightarrow f_{5,t} f_{5,t \pm s} < 0 \quad s = 1..M \\ f_{5,t} \text{ en los demás casos} \end{cases}$$

En esta fase se impone la condición de que la duración parcial de los ciclos identificados ha de ser, como mínimo, de M meses. Por defecto $M=6$.

Finalmente, se vuelve a aplicar el procedimiento de secuenciación con el fin de garantizar la coherencia del fechado:

$$[2.11] \quad f_t = f_{7,t} = \langle F_5 \rangle f_{6,t}$$

El algoritmo de fechado, incorporado en el programa $\langle F \rangle$, asume un elevado grado de suavidad en la serie que se desea fechar. Si este grado no es suficiente, el programa puede aplicar un filtro autorregresivo de paso bajo a petición del analista para eliminar los elementos de carácter irregular que dificultan el fechado, véase Abad y Quilis (1996, 1997) para detalles adicionales.

3. IDENTIFICACION DE PUNTOS DE GIRO: METODOS BASADOS EN MODELOS

La identificación empirista de los puntos de giro consiste, simplificando quizás de forma abusiva, en asociar una etiqueta a unas determinadas observaciones en función de la relación de sus valores con un criterio de clasificación externo (la condición de máximo o mínimo local). De una forma similar, se agrupan las observaciones de una serie en valores crecientes o decrecientes, en función del signo de su tasa de variación. En consecuencia, la propiedad de una determinada observación de ser punto de giro es algo esencialmente ajeno a la propia serie: es, ni más ni menos, una forma útil y conveniente para el analista de clasificar sus observaciones.

El análisis de los puntos de giro basado en modelos estadísticos explícitos para la serie de interés, considera que dichos puntos son un elementos intrínseco en el funcionamiento habitual de la serie, esto es, que su propia dinámica interna genera unas observaciones especiales que permiten identificar intervalos diferenciados en su evolución. En consecuencia, los puntos de giro son observaciones que señalan la transición de la serie de un régimen a otro.

La mayor parte de los modelos que se usan en el análisis del ciclo desde una perspectiva explícita son de tipo no lineal. En particular, los más utilizados son las autorregresiones por umbrales (*threshold autoregression*, TAR) y las autorregresiones con régimen cambiante Markoviano (*Markov switching autoregression*, MS-AR). En ambas clases de modelos es la propia dinámica interna de la serie la que hace que adopte un estado u otro, siendo los puntos de giro aquellas observaciones en las que acontece la transición.

A continuación se exponen las principales características de los modelos TAR y MS-AR así como una metodología completa de especificación, estimación e inferencia. Detalles adicionales se encuentran, para los modelos TAR, en Tong (1983, 1990), Tsay (1989), Tiao y Tsay (1994) y Montgomery *et al.* (1998) y, para los modelos MS-AR, en Hamilton (1989, 1994), Filardo (1993, 1994), McCulloch y Tsay (1994a, 1994b) y Filardo y Gordon (1998).

3.1. Autorregresiones por umbrales (TAR)

Se considera que la serie z_t evoluciona según un modelo autorregresivo por umbrales (TAR) si puede ser expresada según:

$$[3.1] \quad z_t = \mu^{(j)} + \sum_{i=1}^{p(j)} \phi_i^{(j)} z_{t-i} + a_t^{(j)} \quad \text{si } r_{j-1} \leq z_{t-d} < r_j \quad \text{siendo } j = 1..k$$

donde j designa el número de regímenes y r_j son los correspondientes umbrales. En lo que sigue $p = \max[p(j)]$. Para completar el modelo TAR se consideran los siguientes elementos:

- Retardo del umbral: $d \geq 1$

Determina la variable z_{t-d} que define el régimen de comportamiento de z_t según la expresión [3.1]. Esta variable actúa como índice de estado (observable) que particiona el espacio de comportamiento de z_t en k regiones disjuntas.

- Umbrales

Son los valores que definen la partición de z_{t-d} y, en consecuencia, el régimen que seguirá z_t :

$$[3.2] \quad -\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_k < r_{k+1} = \infty$$

- Innovaciones

Se asume, como caso general, que las innovaciones son siempre gaussianas, de media nula y con varianza dependiente del régimen en que se encuentra la serie:

$$[3.3] \quad a_t^{(j)} : \text{iid } N(0, V_j)$$

Se verifica que las innovaciones correspondientes a regímenes distintos son independientes entre sí:

$$[3.4] \quad E(a_t^{(j)} a_s^{(h)}) = 0 \quad \forall j, h \quad \forall t, s$$

El modelo TAR es un modelo lineal por tramos que, globalmente, presenta un comportamiento no lineal. Un modelo TAR puede representar ciertas características que uno lineal (p.e., ARIMA) no puede: ciclos límite, amplitud dependiente de la frecuencia, ciclos asimétricos, cambios de nivel, etc. Resulta conveniente resaltar algunos aspectos específicos de estos modelos:

- a. El orden del operador AR puede diferir entre regímenes. De esta manera, la dinámica de cada uno de ellos puede diferenciarse no sólo porque los parámetros del operador AR sean distintos sino también porque el propio operador sea diferente.
- b. Un caso particular interesante es aquél en el que la única diferencia entre los regímenes se debe a que la varianza de la innovación depende del estado. En este caso se tiene un modelo lineal no homogéneo.
- c. El modelo TAR se reduce a un modelo AR de nivel aleatorio (*random level AR*) si sólo el término constante ϕ_0 difiere entre regímenes. Este caso y el anterior permiten considerar al modelo TAR como una herramienta útil para el análisis de valores anómalos: cambios de varianza (caso b) y cambios de nivel (caso c).
- d. El elemento básico que induce falta de linealidad en el modelo TAR es la dependencia de los parámetros respecto a los valores (desfasados) de la propia variable:

$$[3.5.a] \quad z_t = \phi_0(z_{t-d}) + \sum_{i=1}^{p(j)} \phi_i(z_{t-d}) z_{t-i} + a_t$$

$$[3.5.b] \quad a_t : \text{iid } N(0, V(z_{t-d}))$$

La aplicación de un modelo TAR requiere, como paso preliminar, la identificación del retardo umbral (d), de los propios umbrales (r_j) y de los órdenes $p(j)$ de los operadores AR vigentes en cada uno de los regímenes. Tsay (1989) propone una metodología de identificación tentativa basada en cuatro etapas:

1. Modelización lineal preliminar.
2. Selección del retardo del umbral.
3. Determinación de los umbrales.
4. Especificación de los operadores AR de cada régimen.

El modelo finalmente especificado es estimado por MCO, considerando k series formadas por las observaciones pertenecientes a cada régimen. Finalmente, se utilizan los contrastes de diagnóstico habituales para aceptar como válido el modelo y, en caso contrario, modificarlo en la dirección apropiada. A continuación se exponen brevemente las cuatro etapas de la metodología de Tsay.

1. Modelo lineal preliminar

Se considera un modelo AR(p) para toda la serie:

$$[3.6] \quad z_t = \mu_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + a_t$$

Tsay recomienda que la especificación de p se realice mediante las funciones de autocorrelación simple y parcial, con preferencia frente a criterios de penalización como los Criterios de Información de Akaike (AIC) o bayesiano (BIC). El modelo [3.6] permite disponer de una estimación inicial de los $p(j)^2$ y puede servir también como modelo de referencia para ulteriores comparaciones.

2. Selección del retardo del umbral

El criterio propuesto para seleccionar z_{t-d} es:

$$[3.7] \quad d = \max_v F(p, v)$$

donde p ha sido determinado en la etapa anterior y $F(\cdot)$ es un contraste de no linealidad de tipo F basado en Tsay (1986). El máximo valor de $F(\cdot)$ sirve como indicador de la intensidad de los efectos no lineales y permite, en consecuencia, determinar el valor más apropiado para el retardo del umbral.

El procedimiento seguido en esta etapa puede formularse mediante el siguiente bucle:

Para $d=1..p$:

- Obtener y_t como z_t ordenada tomando a z_{t-d} como índice.
- Estimar un $AR(p)$ para y_t .
- Obtener los residuos recursivos e_t correspondientes.
- Estimar una regresión entre e_t e $Y_t=[1, y_t, \dots, y_{t-d}]$.
- Obtener los residuos recursivos f_t correspondientes.
- Realizar un contraste F de significación global de los parámetros de una regresión entre e_t y f_t .

Esta etapa es crucial en el proceso de especificación propuesto por Tsay. Si la ordenación de z_t se realiza en función de la verdadera variable umbral z_{t-d} , las observaciones ordenadas y_t estarán agrupadas dependiendo de los distintos regímenes existentes, de manera que no existe cruzamiento alguno, esto es, la serie y_t aparece como el resultado de la unión de k series distintas colocadas una detrás de otra. En consecuencia, los residuos del modelo $AR(p)$ aplicado a y_t mostrarán un comportamiento heterogéneo, replicando la estructura segmentada de y_t . Pero, ¿qué explica esa segmentación? Pues precisamente los valores adoptados por y_t que son a su vez función de los de z_{t-d} . Este hecho da como resultado que regresores y residuos no sean ortogonales y que un contraste F en una regresión entre ambas variables no rechace la hipótesis de dependencia entre ambas series.

Naturalmente, el valor de d no es conocido por lo que es necesario efectuar una búsqueda sobre su espacio de comportamientos guiada por el principio de maximizar el valor del contraste F ya que, en ese caso, el valor de d que lo hace máximo está indicando que z_{t-d} actúa como el discriminante más potente, al particionar y_t de forma máximamente heterogénea entre grupos y máximamente homogénea dentro de cada grupo.

² Recuérdese que $p=\max[p(j)]$.

3. Determinación del los umbrales

En la etapa anterior se ha determinado si existe o no un comportamiento no lineal en la serie y , en el primer caso, el retardo del umbral correspondiente (d). A continuación, hay que especificar los valores de los umbrales $r_1 \dots r_k$ que completan la especificación de la transición de la serie observada z_t de un régimen a otro.

Tsay (1989) propone el uso de métodos gráficos para realizar esta tarea. En particular, el examen de la nube de puntos de los t -ratios de los parámetros del modelo AR(p) estimados recursivamente frente a los valores de z_{t-d} . De esta manera, el valor de esta variable capaz de generar un cambio en el comportamiento de los parámetros ϕ frente a z_{t-d} señala la presencia de un umbral r así como su magnitud cuantitativa³.

Asimismo, el estudio de la nube de puntos de los residuos recursivos del modelo AR(p) frente a los valores de z_{t-d} también puede usarse como herramienta de identificación: los valores de z_{t-d} que señalan un cambio de comportamiento en su relación con los residuos, indican los valores más apropiados para los umbrales.

4. Especificación de los operadores AR de cada régimen

Una vez que se ha determinado tanto el retardo del umbral d como los propios umbrales $r_1 \dots r_k$, se puede refinar la especificación considerando los valores de z_t en cada uno de los regímenes como k series distintas, aplicando a continuación los procedimientos habituales de identificación de modelos lineales: funciones de autocorrelación simple y parcial y criterios de penalización como el AIC o BIC.

La identificación de los puntos de giro en un modelo TAR es inmediata. Asumiendo $k=2$ se tiene que las observaciones en las que $z_{t-d}=r$ definen la transición de un estado a otro y son, por lo tanto, los puntos de giro de la serie analizada.

3.2. **Autorregresiones con régimen cambiante Markoviano (MS-AR)**

Los modelos MS-AR presentan importantes semejanzas con los TAR, sobre todo en lo que se refiere a su combinación de elementos no lineales (saltos discretos dotados de un patrón sistemático) y lineales (una estructura autorregresiva local). No obstante, tanto su proceso de especificación como, especialmente, de estimación son muy diferentes de los que se aplican usualmente a los modelos TAR.

En los modelos MS-AR el comportamiento dinámico de la serie z_t varía en función del régimen o estado en que se encuentre siguiendo, dentro de cada uno de ellos, una evolución lineal de tipo autorregresivo.

$$[3.8] \quad z_t = \mu^{(j)} + \sum_{i=1}^{p(j)} \phi_i^{(j)} z_{t-i} + a_t^{(j)} \quad \text{si } s_t = j \quad \text{siendo } j = 1..k$$

Donde s_t una variable de estado binaria e inobservable que define el régimen en que se encuentra el sistema.

Se supone que las innovaciones son normales, de media nula y con varianza dependiente del régimen en que se encuentre la serie:

$$[3.9] \quad a_t^{(j)} : \text{iid } N(0, V_j)$$

³ Véase la expresión [3.5.a].

Hasta este punto la especificación de un modelo MS-AR es muy similar a la de uno TAR, por lo que rigen los mismos comentarios que ya se han realizado.

La evolución de la variable de estado (inobservable) s_t que define el régimen en que se encuentra la serie obedece a una cadena de Markov de primer orden:

$$[3.10] \quad \text{prob}(s_t = i | s_{t-1} = j) = \varepsilon_{i,j} \in (0,1) \quad \forall i, j = 1..k$$

Con el fin de facilitar la exposición se asumirá que sólo existen dos estados: $j=1$ (expansión o ascenso) y $j=2$ (contracción o descenso). La matriz de transición será:

$$[3.11] \quad \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 1 - \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

El elemento clave del modelo MS-AR y que lo diferencia acusadamente del modelo TAR, es la estructura markoviana de la variable de estado s_t . Este esquema permite una definición precisa y rigurosa de los puntos de giro al mismo tiempo que los ubica en un marco formal explícito. Si se considera que $s_t=1$ (2) designa estados recesivos (expansivos), entonces ε_2 (ε_1) cuantifica la probabilidad de observar un máximo (mínimo) cíclico. Naturalmente, $1-\varepsilon_1$ ($1-\varepsilon_2$) miden la probabilidad de continuidad de las fases de expansión (contracción). De esta forma, el estado subyacente del sistema evoluciona de acuerdo con una ley interna de movimiento que hace que la transición entre las distintas fases del ciclo sea un proceso intrínseco.

Por otra parte, las probabilidades de transición ε_i permiten la representación de algunas características de los ciclos económicos que no son fáciles de expresar con otros modelos. He aquí algunos ejemplos:

- Asimetría
Si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ se apreciará una asimetría entre las fases de expansión y contracción. Así, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ las primeras serán más duraderas que las segundas, Hamilton (1989, 1994).
- Dependencia de la duración
Si ε_i muestra una dependencia funcional del número de períodos transcurridos desde el anterior punto de giro, se formaliza la noción de que la probabilidad de observar un punto de giro aumenta a medida que transcurre la actual fase cíclica, Lam (1997).
- Dependencia estacional
Aparece cuando ε_i varía acorde con la estación. Esto indicaría la presencia de una interacción entre el componente cíclico y el estacional que daría lugar, por ejemplo, a que los mínimos cíclicos no se observaran en el trimestre estival, Ghysels (1994).
- Indicadores adelantados
Usualmente se considera que x_t es un indicador adelantado de z_t si su consideración mejora la predicción de los puntos de giro de esta última. Una manera sencilla de formalizar esta posibilidad es verificando si ε_i depende de x_t , usualmente a través de un modelo de elección discreta (tipo Logit o Probit) que vincula las probabilidades de transición con los valores presentes y pretéritos del indicador x_t , véase Filardo (1993, 1994).

La estimación de un modelo MS-AR es complicada debido a la naturaleza no lineal de su representación en el espacio de los estados y, por consiguiente, a las aproximaciones numéricas que ha de realizar el filtro de Kalman en cada una de sus iteraciones, véase Hamilton (1989). Una forma de evitar estos problemas consiste en utilizar el muestreo de Gibbs, como proponen McCulloch y Tsay (1994). A continuación se expone de forma condensada su procedimiento.

En el modelo [3.8]-[3.10] con $k=2$ se considera que sus parámetros son variables aleatorias cuyas distribuciones marginales *a priori* se detallan a continuación.

El vector formado por todos los parámetros autorregresivos sigue una distribución normal:

$$[3.12] \quad \phi \sim N(\bar{\phi}, \Sigma_{\phi})$$

donde usualmente Σ_{ϕ} es una matriz diagonal. Por su parte, las varianzas de las innovaciones evolucionan según una χ^2 -cuadrado invertida, convenientemente escalada:

$$[3.13] \quad V_i \sim w_i \lambda_i / \chi_{w_i}^2 \quad i = 1, 2$$

Para la modelización de las probabilidades de transición se recurre, por su flexibilidad, a una distribución Beta:

$$[3.14] \quad \varepsilon_i \sim \text{Beta}(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}) \quad i = 1, 2$$

Finalmente, los términos independientes seguirán una distribución normal que verifique la restricción $\mu_1 > \mu_2$:

$$[3.15] \quad \mu \sim N(\bar{\mu}, \Sigma_{\mu}) I(\mu)$$

donde $I(\mu)$ es una variable indicadora del cumplimiento de la restricción:

$$[3.16] \quad I(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 > \mu_2 \\ 0 & \text{si } \mu_1 \leq \mu_2 \end{cases}$$

Esta forma de proceder obliga a establecer valores numéricos para todos los parámetros que definen las distribuciones marginales *a priori*. Estos valores, llamados ‘hiperparámetros’ son:

$$[3.17] \quad \tau = (\bar{\phi}, \Sigma_{\phi}; w_i \lambda_i; \bar{\mu}, \Sigma_{\mu}; \varphi_1, \varphi_2)$$

Antes de aplicar el muestreo de Gibbs hay que fijar el valor de t junto con las condiciones iniciales: s_0 y $z_0 = z_1 \dots z_p$, con $p = \max(p_1, p_2)$. El citado muestreo se define a través del siguiente algoritmo:

- Repetir $N+M$ veces:
 - Generar probabilidades de transición según: $\varepsilon_i \sim \text{Beta}(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}) \quad i = 1, 2$;
 - $[\alpha]$: Generar $\{s_t \ t=1..n \mid s_0, \varepsilon\}$;
 - Estimar \mathbf{m} condicionado a s ;
 - Estimar \mathbf{f} , condicionado a \mathbf{m} ;
 - Estimar V , condicionado a \mathbf{f} ;
 - Estimar e_t (residuos), condicionados a s , \mathbf{m} y \mathbf{f} ;
 - Estimar s_t , condicionado a e_t ;
 - Estimar \mathbf{e} , condicionado a s_t ;
 - Ir a $[\alpha]$;
- Desechar las M primeras realizaciones;

- Estimar los parámetros como promedios de los N valores finales de las correspondientes distribuciones a posteriori. Estas distribuciones proporcionan las varianzas correspondientes.

Aunque los detalles del muestreo de Gibbs pueden ser complejos, la idea básica es muy sencilla: si se conoce el estado subyacente del sistema s_t podemos particionar inmediatamente la muestra en dos partes: la que se corresponde con períodos de descenso ($s_t=1$) o ascenso ($s_t=2$). A partir de ahí, como promedio simple, se estima \mathbf{m} . Ajustando la muestra de este valor, se puede estimar \mathbf{f} por MCO. Estimado los parámetros de los operadores AR, resulta inmediato disponer de los residuos y , a partir de los mismos, de las varianzas de las innovaciones.

Una vez que se dispone de los residuos se puede refinar los valores de s_t . La idea es que, si los primeros son muy elevados en valor absoluto, se ha cometido un error de asignación. Así, si se declara $s_t=1$ cuando es realmente $s_t=2$ aparecerán residuos significativamente positivos que sugerirán como corrección cambiar el 1 por un 2. Naturalmente, los intervalos de confianza se calcularán utilizando las varianzas V_i previamente estimadas.

A partir de esta estimación refinada de s_t se vuelven a calcular las probabilidades de transición, teniendo en cuenta la información proporcionada por el número de saltos de un estado a otro:

$$[3.18] \quad k_i = \#(\text{saltos del estado } i \text{ al } j \text{ en } s) \quad \text{con } i, j = 1, 2$$

En consecuencia, la nueva distribución Beta será:

$$[3.19] \quad \varepsilon_i \sim \text{Beta}(\varphi_{1,i} + k_i, \varphi_{2,i} + n_i - k_i) \quad i = 1, 2$$

4. CLASIFICACION CICLICA: METODOS BIVARIANTES

La identificación de indicadores de adelanto, coincidencia y retraso para un sistema económico constituye una de las principales tareas del análisis cíclico, cuyo origen se remonta a principios del siglo XX con los estudios del NBER sobre la economía de los Estados Unidos.

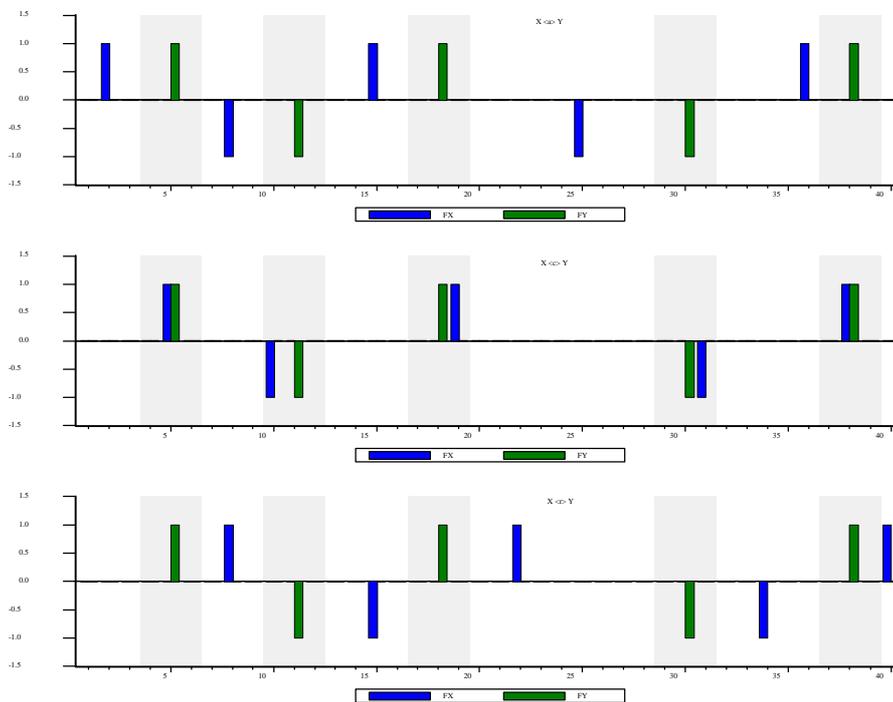
Los procedimientos más utilizados consideran que existe una serie especial que actúa como patrón de comparación, bien por su relevancia económica (p.e., el PIB) bien por sus propiedades estadísticas (p.e., el IPI). A continuación, las series que se desea clasificar (x_t) son relacionadas, una por una, con la de referencia (y_t).

Los procedimientos de clasificación cíclica pueden utilizar los desfases entre los puntos de giro, la función de correlación cruzada o la coherencia espectral. Los dos primeros métodos están definidos en el dominio del tiempo mientras que el tercero lo está en el de la frecuencia.

4.1. Clasificación cíclica mediante los puntos de giro: el procedimiento <G>

La clasificación cíclica basada en los puntos de giro trata de identificar pautas sistemáticas de adelanto, coincidencia o retraso tomando como cronología básica la que proporcionan los puntos de giro de la serie de referencia (f_y). Así, si la serie que se desea clasificar, x_t , tiene sus puntos de giro mostrando un desfase mediano⁴ comprendido entre -3 y 3 meses con respecto a los de la serie de referencia, se considera que ambas son coincidentes. Si el citado desfase mediano es menor (mayor) que -3 (3) meses, se estima que x_t adelanta (retrasa) a y_t . Los siguientes gráficos ilustran estas situaciones:

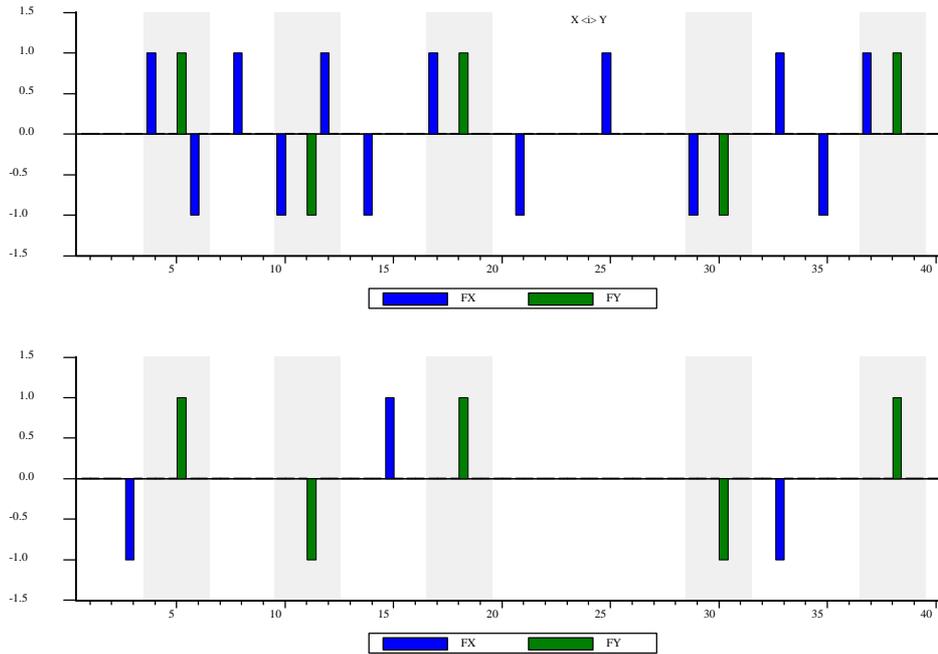
Gráfico 3.1: Adelanto, coincidencia, y retraso



También puede aparecer una cuarta posibilidad: que los puntos de giro de x_t no guarden correspondencia con los de y_t debido a la ausencia de un ciclo común entre ambas series, usualmente debido a una diferencia importante entre las frecuencias fundamentales de ambos ciclos. Los siguientes gráficos muestran esta situación:

⁴ Se utiliza la mediana por ser un estimador de posición robusto frente a extremos, por lo que es especialmente útil en un contexto de muestras pequeñas como el que habitualmente se encuentra en esta clase de análisis.

Gráfico 3.2: Aciclicidad



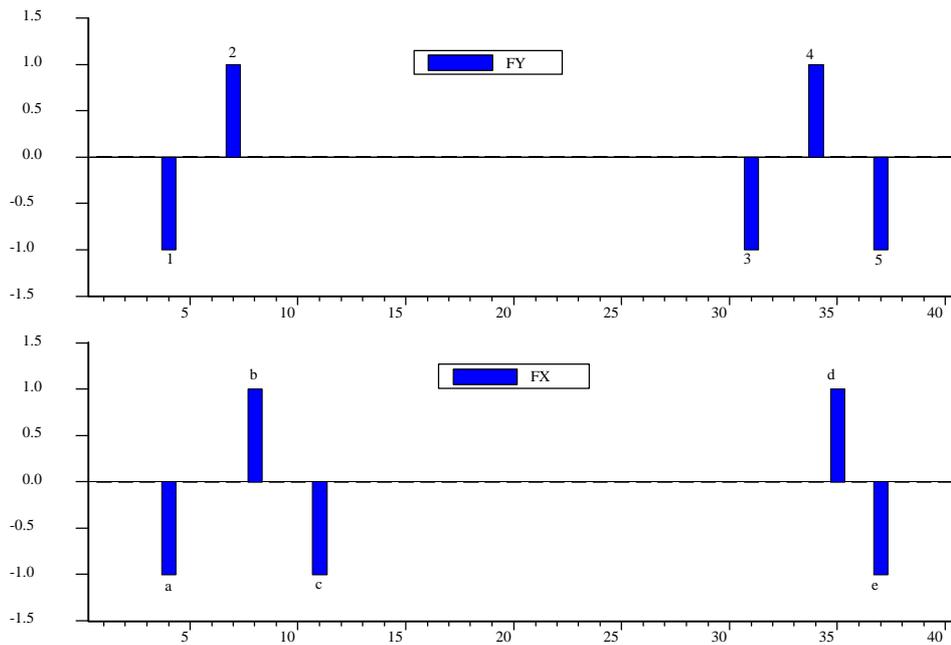
El procedimiento <G> opera de la siguiente forma: a partir de los puntos de giro de las series de referencia (f_y) y clasificada (f_x) identificados por medio de alguno de los métodos descritos en las secciones anteriores, se establece una correspondencia entre ellos en tres pasos:

1. se asocia cada punto de giro de la serie f_y con el más próximo de f_x ,
2. se asocia cada punto de giro de la serie f_x con el más próximo de f_y ,
3. se eliminan los emparejamientos unidireccionales, reteniéndose exclusivamente los bidireccionales.

Esta relación se denomina *dobles* y presenta la característica de que dos puntos de giro de una serie no pueden estar asociados a un mismo punto de giro de la otra, por lo cual pueden existir puntos de giro sin correspondencia. Si el número de puntos de giro sin correspondencia es elevado, se considera que no hay relación cíclica entre los puntos de giro de x e y . Este procedimiento de clasificación también ha sido programado en Pascal y se denomina <G> (Abad y Quilis, 1997).

El siguiente ejemplo será de utilidad para comprender la mecánica de dicho programa. Sean las series de puntos de giro de y y x , representadas esquemáticamente:

Gráfico 3.3: Cronologías cíclicas



La siguiente tabla ilustra la aplicación del programa <G> a las dos series anteriores:

Tabla 3.1 Mecánica del procedimiento <G>

Etapa					
(1)		(2)		(3)	
y ---> x		x ---> y		y <---> x	
Origen	Imagen	Origen	Imagen	Origen	Imagen
1	a	a	1 *	1	a
2	b	b	2	2	b
3	e *	c	1 *	3 **	
4	d	d	4		c **
5	e *	e	5	4	d
				5	e

* Puntos de giro con origen múltiple
 ** Puntos de giro sin relación doble

En este ejemplo, el punto de giro 3 de la serie y ha quedado desemparejado, ya que la primera etapa del proceso lo asignaba con el e de la serie x, pero éste ha encontrado correspondencia doble con el 5 de y. Dado que es la relación en los dos sentidos la que prevalece, el punto de giro 3 de y queda sin correspondencia en la asignación final. El caso del punto de giro c de la serie x es idéntico.

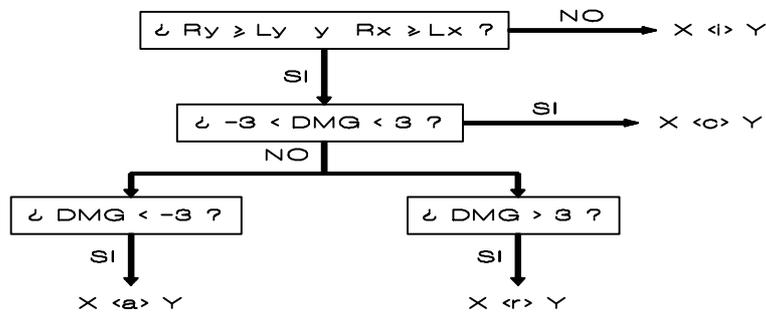
Formalmente: si C_y y C_x denotan el conjunto de todos los puntos de giro de y y x, respectivamente, y CC_y y CC_x el de los que tienen relación doble, se puede establecer la siguiente definición:

$$[4.1] \quad R_s = \text{cardinal}(CC_s) / \text{cardinal}(C_s) \in [0,1] \quad s = \{Y, X\}$$

Los ratios R_y y R_x constituyen una medida sintética del grado de conformidad entre dos series. Que ambos sean próximos a la unidad es condición necesaria para que exista una relación cíclica entre

las dos series. Si, por el contrario, ambos son próximos a cero se considera que no existe relación cíclica entre las series o, en la terminología del programa <G>, la serie x es cíclicamente inclasificable en relación con la serie y ($x <i> y$). Los casos en que R_y o R_x tienden a cero (pero no ambos a la vez) indican situaciones intermedias en las que puede existir cierta conformidad local pero no global, lo cual es indicio de inconsistencia. En estos casos, para mayor seguridad, se ha optado por considerar también ambas series como inclasificables. Los límites de admisión, L_y y L_x , son establecidos 'a priori' y, por defecto, el programa <G> asume $L_y=L_x=0.70$.

Si y y x son conformes ($x <G> y$) se calculan los desfases entre los pares de puntos de giro con relación doble, utilizando el desfase mediano global de x respecto a y (DMG) como criterio de clasificación. Si éste no supera los tres meses en valor absoluto, se considera que y y x son coincidentes. Si el DMG es mayor que tres en valor absoluto, la serie no es coincidente; en este caso se estudia el signo del DMG: si es positivo la serie x está retrasada en relación con la serie y , y si es negativo está adelantada. Así pues, la clasificación final vendrá determinada de la siguiente manera:



Denotándose las relaciones entre x e y de la siguiente forma:

- $x <i> y$: ' x es cíclicamente inclasificable con y ',
- $x <c> y$: 'los puntos de giro de x son coincidentes con los de y ',
- $x <a> y$: 'los puntos de giro de x adelantan a los de y ',
- $x <r> y$: 'los puntos de giro de x retrasan a los de y '.

Al igual que ocurre con los resultados automáticos del <F>, es conveniente cualificar los del <G>. A este respecto, no debe olvidarse que el programa proporciona una clasificación tomando en consideración todos los puntos de giro doblemente relacionados de x e y , es decir, no distingue entre máximos y mínimos. Es recomendable considerar las correspondencias entre máximos y entre mínimos por separado, con el objeto de detectar posibles relaciones dinámicas asimétricas entre las dos series. Estos ejercicios son uno de los principales atractivos de esta metodología de análisis cíclico.

Por último, merece la pena destacar la objetividad que impone el programa <G> en una de las etapas más comprometidas del análisis cíclico. La experiencia acumulada con este programa indica que el criterio de distancia mínima utilizado impide tanto la proyección de consideraciones apriorísticas sobre la naturaleza de las series como la fijación arbitraria de las correspondencias entre sus puntos de giro.

4.2. Clasificación cíclica mediante la función de correlación cruzada

El uso de la función de correlación cruzada (fcc) es una de las formas más habituales y extendidas de analizar la relación entre los ciclos de dos series temporales. Su facilidad de cómputo y su sencillez han contribuido a esta difusión. Sean x_t e y_t dos señales cíclicas. La fcc entre ambas series es:

$$[4.2] \quad \rho_{y,x}(k) = \frac{\sum_t (y_t - \mu_y)(x_{t+k} - \mu_x)}{\sqrt{\sum_t (y_t - \mu_y)^2 \sum_t (x_t - \mu_x)^2}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde μ_z es el valor medio de la serie z .

La fcc proporciona una estimación del grado de asociación lineal entre y_t y los valores desfasados de x_{t+k} , tanto retrospectivamente ($k < 0$) como prospectivamente ($k > 0$). La fcc permite definir un criterio sencillo de clasificación cíclica. Sea:

$$[4.3] \quad k^* = \arg \max(|\rho_{y,x}(k)|)$$

donde $|\cdot|$ denota valor absoluto. Entonces:

$$[4.4] \quad x_t \text{ es } \begin{cases} \text{adelantada} \\ \text{coincidente} \\ \text{retrasada} \end{cases} \text{ respecto a } y_t \text{ si } k^* \in \begin{cases} (-\infty, -L) \\ [-L, L] \\ (L, \infty) \end{cases}$$

donde L es un valor fijado *a priori* (usualmente, $L=3$ si la serie es mensual o $L=1$ si es trimestral).

Asimismo, como $-1 \leq \rho_{y,x}(k) \leq 1$ se puede determinar el carácter cualitativo de la relación cíclica entre x e y . Dicho criterio se puede formalizar de la siguiente forma:

$$[4.5] \quad x_t \text{ es } \begin{cases} \text{anticíclica} \\ \text{acíclica} \\ \text{procíclica} \end{cases} \text{ respecto a } y_t \text{ si } \rho(k^*) \in \begin{cases} [-1, -C] \\ [-C, C] \\ (C, 1] \end{cases}$$

donde C es un valor crítico asociado a un determinado nivel de significación.

4.3. Clasificación cíclica mediante la función de coherencia espectral

Finalmente, la relación cíclica entre x_t e y_t puede ser analizada desde el dominio de la frecuencia. Para ello se calcula la función de coherencia espectral entre ambas series según:

$$[4.6] \quad C_{YX}(w) = \frac{|f_{YX}(w)|^2}{f_X(w)f_Y(w)}$$

donde w es la frecuencia (expresada en radianes), $f_x(w)$ y $f_y(w)$ son, respectivamente, los espectros de las series x e y , $f_{yx}(w)$ es el espectro cruzado entre x e y . Por último $|\cdot|$ denota la operación módulo.

La coherencia es una medida no paramétrica, comprendida entre cero y uno, que expresa el grado de asociación, tanto lineal como no lineal, entre dos series en una frecuencia dada. Así, un valor próximo a uno (cero) en una frecuencia w_s denota una elevada (escasa) conformidad entre las oscilaciones con período $2\pi/w_s$ de ambas series.

Otra medida interesante asociada al análisis espectral es la función de fase. Formalmente:

$$[4.7] \quad \Phi_{YX}(w) = \arg[f_{YX}(w)] = \tan^{-1}\{-\text{Im}[f_{YX}(w)]/\text{Re}[f_{YX}(w)]\}$$

donde $\text{Im}[\cdot]$ y $\text{Re}[\cdot]$ denotan, respectivamente, la parte imaginaria y real de un número complejo. La función de fase está expresada en unidades de frecuencia (radianes) y, con el fin de facilitar su interpretación, se suele expresar en unidades temporales a través de la siguiente expresión:

$$[4.8] \quad D_{YX}(w) = \Phi_{YX}(w)/w$$

La función $D(w)$, llamada “de desfase”, representa el adelanto (retraso) de x respecto a y asociado a una oscilación de frecuencia dada. Si $D(w)$ es positiva (negativa), los ciclos de x cuya frecuencia es w retrasan (adelantan) a los de y caracterizados por esa misma frecuencia.

La estimación de los espectros, tanto univariantes como bivariantes, debe efectuarse suavizando por medio de una ventana apropiada los correspondientes periodogramas, calculados a su vez por medio de la transformada rápida de Fourier. En Chatfield (1984) y Harvey (1981) se encuentra una exposición detallada de estos conceptos.

Este enfoque frecuencial es menos utilizado que el basado en el dominio del tiempo porque requiere un tamaño muestral superior para ser plenamente efectivo y una elección apropiada de la ventana (“carpintería de ventanas”) que no es inmediata en absoluto.

5. CLASIFICACION CICLICA: METODOS MULTIVARIANTES

En la sección anterior se han expuesto los principales métodos de clasificación dinámica basados en el análisis del comportamiento de las señales cíclicas de dos series temporales. Estos métodos destacan por su sencillez y por su robustez, lo que explica su amplia difusión. No obstante, en determinados contextos, puede resultar de interés realizar la clasificación cíclica de un vector de series temporales de forma simultánea, considerando el sistema de forma multivariante en lugar de bivariante. De esta manera, se dispone de una perspectiva explícitamente conjunta y se establece de forma más firme la transitividad⁵ de las clasificaciones cíclicas.

La metodología que se expone a continuación es una extensión al caso dinámico del conocido modelo factorial del análisis multivariante, véase Peña y Box (1987) y Peña y Poncela (1999). Esta metodología permite tanto la identificación de patrones comunes como la determinación de la estructura de desfases (clasificación cíclica). Asimismo, puede ser utilizada para el diseño de índices sintéticos. Un tratamiento detallado se ofrece en Melis (1985), Cristóbal *et al.* (1996) y Cristóbal y Quilis (1998).

El principio básico de la metodología se puede expresar mediante el siguiente ejemplo.

Sea $z_{2,t}$ un indicador adelantado de $z_{1,t}$ con un desfase de 1 mes. Entonces $z_{2,t-1}$ es un indicador coincidente de $z_{1,t}$ y la relación que vincula a ambas series podrá ser expresada de la siguiente forma:

$$[5.1] \quad \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} f_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

donde f_t es el factor común que vincula a ambas series y que explica la mayor parte de su variabilidad, λ_i son las cargas correspondientes y ε_i son los factores idiosincrásicos que representan las variaciones de z_i que no pueden atribuirse al patrón común del sistema. De esta forma, una vez identificada la estructura de desfases existente entre los indicadores (en el ejemplo, el desfase de un mes entre $z_{2,t}$ y $z_{1,t}$), se estima un modelo factorial estático para el vector de series adecuadamente puesto en fase. Naturalmente, las medidas habituales de bondad de ajuste y de diagnóstico de esta clase de modelos resultan aplicables, por lo que se dispone de un potente instrumento para cuantificar la hipótesis factorial.

En consecuencia, en esta clase de modelos existen dos ecuaciones: una expresa la relación dinámica existente entre el vector de series temporales y otra que representa la estructura factorial. La primera es:

$$[5.2] \quad W_t = H(B)Z_t \quad \text{con } H(B) = \text{diag}(B^{d_1} \dots B^{d_k})$$

donde Z_t es el vector de k series observadas, d_i son los desfases correspondientes y W_t es el vector de series puestas en fase que, por lo tanto, evolucionan de manera coincidente. La expresión [5.2] actúa como "ecuación de transición", reflejando la estructura dinámica del sistema.

Para completar el modelo se necesita una segunda ecuación que relaciona W_t con sus factores comunes inobservables:

$$[5.3] \quad W_t = PF_t + E_t$$

⁵ Formalmente: si $x <a> y$ e $y <a> z$, entonces $x <a> z$.

donde F_t y E_t son vectores que representan, respectivamente, los r factores comunes del sistema ($r < k$) y los k factores idiosincrásicos. La especificación se completa asumiendo ortogonalidad entre F_t y E_t e imponiendo una estructura diagonal a los componentes idiosincrásicos:

$$[5.4] \quad E_t \sim \text{iid } N(0, \Sigma_E) \quad \Sigma_E = \text{diag}(\sigma_{E1} \dots \sigma_{Ek})$$

La identificación empírica de este modelo requiere, como pasos esenciales, la determinación de la estructura de desfases $d=[d_1 \dots d_k]$ y la estimación de la correspondiente matriz de cargas P . Con el fin de realizar este procedimiento de identificación empírica se propone el siguiente algoritmo:

1. Extensión del vector de series observadas

Se amplía el vector original Z_t incluyendo sus valores desfasados Z_{t-j} con $j=0..M$. El correspondiente vector de $k(M+1)$ elementos es:

$$[5.5] \quad Y_{M,t} = \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t-1} \\ \dots \\ Z_{t-M} \end{bmatrix}$$

La determinación del máximo valor del retardo M se puede realizar bien mediante consideraciones *a priori*, bien mediante algún criterio de penalización como el AIC o el BIC. La elección de un valor apropiado para M requiere ponderar dos consideraciones contrapuestas: parsimonia (para evitar la sobreparametrización del modelo y facilitar su interpretación) y resolución (para identificar correctamente la estructura de desfases).

La experiencia acumulada con este método sugiere que seleccionar $M=12$ o $M=4$ para series mensuales o trimestrales, respectivamente, es una elección razonable. Asimismo, si el valor de k es elevado la dimensión de $Y_{M,t}$ deviene inmanejable, por lo que se su composición se efectúa considerando $j=0..M$ de manera discontinua. Por ejemplo, con $M=12$:

$$[5.6] \quad Y_{M,t} = \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t-3} \\ Z_{t-6} \\ Z_{t-9} \\ Z_{t-12} \end{bmatrix}$$

2. Estimación del modelo factorial estático

Se identifica y estima un modelo factorial estático para el vector ampliado $Y_{M,t}$, mediante el análisis de los autovalores y autovectores de la matriz de correlaciones de dicho vector. Nótese que, si M es un valor suficientemente grande, dicha matriz encapsula toda la dinámica del vector original Z_t , al contener todas las matrices de correlaciones cruzadas de dicho vector hasta el retardo M :

$$[5.7] \quad \Gamma_Y(0) = \begin{bmatrix} \Gamma_Z(0) & \Gamma_Z(1) & \dots & \Gamma_Z(M) \\ \Gamma_Z(1) & \Gamma_Z(0) & \dots & \Gamma_Z(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_Z(M) & \Gamma_Z(M-1) & \dots & \Gamma_Z(0) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es de tipo Toeplitz (simétrica por bloques y en su conjunto) y condensa toda la información dinámica del vector de series observadas Z_t .

Usualmente, por razones prácticas y también con el fin de facilitar la interpretación del modelo, se considera un modelo unifactorial: $r=1$. No obstante, el algoritmo es aplicable al caso general $r>1$ sin problema alguno.

$$[5.8] \quad Y_{M,t} = Pf_t + E_t$$

La estimación del vector de cargas P se realiza calculando el autovector asociado al mayor autovalor de la matriz de correlaciones contemporáneas de $Y_{M,t}$.

3. Simplificación de la matriz de cargas

Habitualmente, la dimensión de P es muy elevada, por lo que su interpretación no es sencilla. Por ello es conveniente idear algún criterio de simplificación que resalte los aspectos más importantes contenidos en P .

Sea $\lambda_{i,j}$ la carga de la variable z_i en el retardo j . Se considerará, en primer lugar, sólo aquellos valores que sean mayores, en valor absoluto, que un cierto umbral o “valor crítico” λ_c . Como la distribución de las cargas en el muestreo no es fácil de derivar, se recomienda seleccionar un valor para λ_c proporcional a $n^{-1/2}$, donde n es el número de observaciones. En consecuencia:

$$[5.9] \quad \lambda_{i,j}^* = \begin{cases} \lambda_{i,j} & \leftrightarrow |\lambda_{i,j}| \geq \lambda_c \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

La identificación del índice de desfase d_i de cada serie se obtiene calculando el máximo correspondiente:

$$[5.10] \quad \lambda_{i,j}^{**} = \begin{cases} \lambda_{i,j}^* & \leftrightarrow \lambda_{i,j}^* = \max_j (|\lambda_{i,j}^*|) \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

El valor del subíndice j para el que se maximiza la carga de la serie i constituye la estimación del retardo d_i correspondiente.

4. Generación del modelo

Una vez que se ha simplificado la matriz de cargas P y que se conoce la estructura de desfases $d=[d_1..d_k]$, se puede formar el modelo completo antes definido:

$$[5.2] \quad W_t = H(B)Z_t \quad \text{con } H(B) = \text{diag}(B^{d_1} .. B^{d_k})$$

$$[5.3] \quad W_t = Pf_t + E_t$$

5. Determinación de la serie de referencia

Una de las ventajas de esta técnica es que ofrece una manera puramente empírica de establecer cuál es la serie de referencia. Para ello conviene recordar que el factor común resume toda la información dinámica de las series consideradas, ya que se ha estimado considerando los sucesivos desfases de Z_t (al operar sobre el vector extendido $Y_{M,t}$) y que, en consecuencia, las cargas $\lambda_{i,j}$ especifican la vinculación de cada serie en cada desfase con el factor. De esta manera, podremos identificar como serie de referencia aquella que se encuentra más relacionada con el factor común obtenido. Formalmente:

$$[5.11] \quad z_{h,t} \text{ es la serie de referencia} \leftrightarrow h = \max_i (|\lambda_{i,j}|)$$

Naturalmente, la elección de la serie de referencia puede hacerse *a priori*, en cuyo caso esta etapa se omite.

6. Clasificación cíclica

La serie de referencia $z_{h,t}$ está máximamente identificada con el factor común f_t en un retardo d ($0 \leq d \leq M$). Para cada variable $i \neq h$ se considera el retardo j correspondiente a su carga simplificada no nula $\lambda_{i,j}$ y se calcula su desfase característico ($de_i = d - j$). De esta manera tenemos el siguiente criterio de clasificación:

$$[5.12] \quad z_{i,t} \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} < a > \\ < c > \\ < r > \end{array} \right\} \text{ respecto a } z_{h,t} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} de_i < -L \\ -L \leq de_i \leq L \\ de_i > L \end{array} \right\}$$

donde L es un parámetro fijado *a priori*. Naturalmente, la clasificación puede ser más detallada, incluyendo, si es posible, series muy adelantadas y/o muy retrasadas. El caso $<i>$ (aciclicidad) aparece cuando $\lambda_{i,j} = 0 \forall j$, esto es, cuando la serie considerada no está identificada de forma alguna con el patrón dominante y, en consecuencia, tampoco lo está con la serie de referencia $z_{h,t}$.

El siguiente ejemplo ilustra el método propuesto. Se considera: $k=4$, $M=2$, $r=1$ y $\lambda_c=0.2$. El modelo factorial para el vector ampliado $Y_{2,t}$ es:

$$[5.13] \quad \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \\ z_{4,t} \\ \dots \\ z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \\ z_{4,t-1} \\ \dots \\ z_{1,t-2} \\ z_{2,t-2} \\ z_{3,t-2} \\ z_{4,t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.91 \\ +0.72 \\ -0.43 \\ +0.11 \\ \dots \\ +0.73 \\ +0.98 \\ -0.52 \\ +0.09 \\ \dots \\ +0.61 \\ +0.82 \\ -0.64 \\ +0.12 \end{bmatrix} f_t + E_t$$

La aplicación a [5.13] del algoritmo de simplificación antes expuesto arroja los siguientes resultados:

$$[5.14] \quad \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \\ z_{4,t} \\ \dots \\ z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \\ z_{4,t-1} \\ \dots \\ z_{1,t-2} \\ z_{2,t-2} \\ z_{3,t-2} \\ z_{4,t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.91 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ +0.98 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ -0.64 \\ 0 \end{bmatrix} f_t + E_t$$

En consecuencia, cabe establecer lo siguiente:

- La serie z_1 se comporta de forma procíclica y está identificada con el factor común de forma contemporánea.
- Por su parte, la serie z_2 también es procíclica pero su identificación con el factor se produce con un retraso de un período.
- La serie z_3 es anticíclica y está vinculada con el factor común con un desfase de dos períodos.

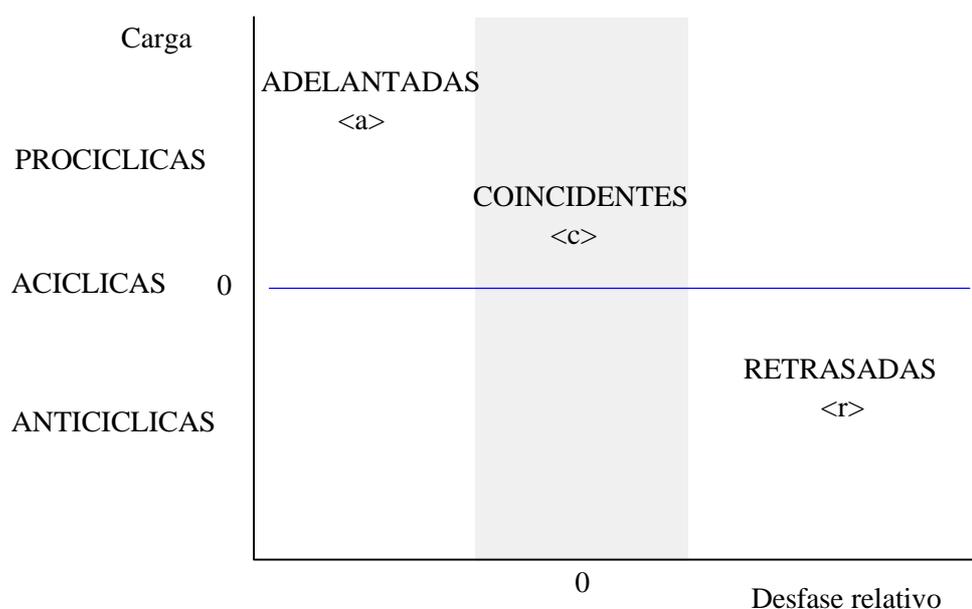
- Finalmente, z_4 no está identificada con el factor común que vincula a las restantes series, por lo que puede ser considerada como acíclica.

Como ya se ha comentado, una de las ventajas de este enfoque es que permite elegir una serie de referencia en función de las propias características empíricas de los datos, sin necesidad de realizar dicha elección *a priori*. En el ejemplo anterior, la serie z_2 podría actuar como referente por ser la más identificada con el factor que describe el ciclo común del vector de series. En consecuencia, como $z_{1,t}$, $z_{2,t-1}$ y $z_{3,t-2}$ son coincidentes entre sí, se puede establecer que z_1 y z_3 son, respectivamente, indicadores retrasado y adelantado de z_2 :

$$[5.15] \quad \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-2} \end{bmatrix} \text{son } \langle c \rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} z_{1,t} \langle r \rangle z_{2,t} \\ z_{3,t} \langle a \rangle z_{2,t} \end{bmatrix}$$

De esta manera, combinando la información suministrada por las cargas con la proporcionada por los desfases, se puede realizar una clasificación cíclica completa, como la que se aprecia en el siguiente gráfico:

Gráfico 5.1: Clasificación cíclica mediante análisis factorial



Finalmente, a partir de los grupos de series adelantadas ($Z_{\langle a \rangle}$), coincidentes ($Z_{\langle c \rangle}$) y retrasadas ($Z_{\langle r \rangle}$) se pueden formar índices sintéticos de adelanto (a_t), coincidencia (c_t) y retraso (r_t) como combinaciones lineales basadas en la estructura de cargas y teniendo en cuenta la estructura de desfases relativos existente dentro de cada grupo:

$$[5.16] \quad \begin{aligned} a_t &= A(B)Z_{\langle a \rangle,t} \\ c_t &= C(B)Z_{\langle c \rangle,t} \\ r_t &= R(B)Z_{\langle r \rangle,t} \end{aligned}$$

Dichos índices son una combinación convexa y normalizada de las series que integran cada categoría dinámica, tomando como base la matriz de cargas simplificadas. Hay que advertir que los grupos no están, por lo común, ubicados en un punto único sino en una banda temporal.

Usualmente, se elige como centro de cada grupo el desfase que, comenzando en cero, se encuentra separado tres meses por cada lado del correspondiente al siguiente grupo: 0, 3, 6 y 9. A continuación se colapsa cada banda a dichos puntos reteniendo la estructura interna de desfases.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han expuesto diversos métodos orientados a dotar al análisis del ciclo económico de una mayor precisión cuantitativa, tanto en sus aspectos univariantes como en los multivariantes. Naturalmente, aún cuando el objetivo es común, los fundamentos estadísticos de dichos métodos son muy dispares y, en consecuencia, sus posibilidades y limitaciones.

La elección de un método concreto depende, como es de esperar, del objetivo perseguido y de los recursos disponibles, en particular los de carácter informático. Siendo el fenómeno cíclico de carácter multidimensional, carece de sentido recomendar un único método con exclusión de todos los demás. Por el contrario, parece más conveniente diseñar una estrategia adaptada a las características específicas del estudio que se desee emprender y que explote de forma conveniente los elementos complementarios de las distintas técnicas.

Al margen de las cuestiones relacionadas con objetivos y restricciones, el analista debe responder, esencialmente, dos preguntas:

- ¿Es el ciclo un fenómeno intrínseco o extrínseco al sistema económico?
- ¿Qué tratamiento desea otorgar a la clasificación cíclica: bivariante o multivariante?

A continuación se examinan con cierto detalle estos dos interrogantes.

Los modelos teóricos del ciclo, en su mayor parte, asumen que éste es el resultado de la propagación por el sistema económico de impulsos generados fuera del mismo y que actúan como las fuerzas impulsoras, en última instancia, de las variables del modelo. Este esquema de impulso-propagación es compartido por estructuras teóricas muy diversas que difieren entre sí tanto en lo que concierne al número y carácter de las innovaciones como, sobre todo, al mecanismo interno de propagación. Esta aproximación tiene su continuidad natural en los modelos lineales de series temporales (p.e., ARIMA o VARMA) y en el empleo de filtros lineales para realizar las descomposiciones precisas. Desde este punto de vista, los puntos de giro son propiedades extrínsecas de las series cuya naturaleza y modelización radica en la que se efectúe con los *shocks* que inciden sobre el sistema (p.e., su asimetría o la presencia de fenómenos de mixtura).

Por el contrario, si el enfoque teórico considera que el mecanismo de propagación es consustancial al de los impulsos o existen elementos no lineales en el sistema (p.e., equilibrios múltiples), entonces el procedimiento más adecuado requiere el uso de modelos no lineales. En este marco, los puntos de giro sí son elementos centrales del sistema, susceptibles de modelización y predicción.

En cuanto al segundo interrogante, la elección de un método bivariante o multivariante de clasificación cíclica depende, esencialmente, del grado de afinidad existente entre el conjunto de series que se desea clasificar. Cuanto mayor sea la comunalidad entre las series más pertinente resulta la utilización de técnicas multivariantes del tipo del análisis factorial dinámico. Por el contrario, si existe una heterogeneidad importante en el vector de series temporales resulta más adecuada y robusta una clasificación bivariante, de forma que los errores de especificación globales no repercutan adversamente en las clasificaciones individuales.

REFERENCIAS

- Abad, A. y Quilis, E.M. (1996) “<F> y <G>: dos programas para el análisis cíclico. Aplicación a los agregados monetarios”, *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 62, p. 63-103.
- Abad, A. y Quilis, E.M. (1997) “Programas de análisis cíclico: <F> , <G> y <FDESC>. Manual del usuario”, Instituto Nacional de Estadística, Documento Interno.
- Boldin, M.B. (1994) “Dating turning points in the business cycle”, *Journal of Business*, vol. 67, n. 1, p. 97-131.
- Bry, G. y Boschan, C. (1971) “Programmed selection of cyclical turning points in individual series”, National Bureau of Economic Research, Boston, USA.
- Burns, A. y Mitchell, W.C. (1946) *Measuring business cycles*, National Bureau of Economic Research, Boston, USA.
- Chatfield, C. (1984) *The analysis of time series: theory and practice*, Chapman and Hall, London, U.K.
- Chin, D.M., Geweke, J.F. y Miller, P.J (2000) “Predicting Turning Points”, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Staff Report n. 267.
- Cristóbal, A., Melis, F. y Quilis, E.M. (1996) “Las series de cartera de pedidos de la industria y su clasificación dinámica”, Instituto de Estudios Fiscales, Papeles de Trabajo n. 27/96.
- Cristóbal, A. y Quilis, E.M. (1998) “Análisis del ciclo económico mediante modelos de índices dinámicos. Aplicación a los Índices de la Producción Industrial”, *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 68, p. 73-93.
- Filardo, A.J. (1993) “The evolution of U.S. business cycle phases”, Federal Reserve Bank of Kansas City, Research Working Paper n. 93-17.
- Filardo, A.J. (1994) “Business-cycle phases and their transitional dynamics”, *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12, n. 3, p. 299-308.
- Filardo, A.J. y Gordon, S.F. (1998) “Business cycle durations”, *Journal of Econometrics*, vol. 85, n. 1, p. 99-124.
- Ghysels, E. (1994) “On the periodic structure of the business cycle”, *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12, n. 3, p. 289-298.
- Gómez, V (1998) “Butterworth filters: a new perspective”, Ministerio de Economía y Hacienda, Documento de Trabajo D-98008.
- Hamilton, J.D. (1989) “A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle”, *Econometrica*, vol. 57, n. 2, p. 357-384.
- Hamilton, J.D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A.
- Harvey, A.C. (1981) *Time series models*, Philip Alan, Oxford, U.K.
- Kaiser, R. y Maravall, A (1999) “Short-term and long-term trends, seasonal adjustment, and the business cycle”, Banco de España, Documento de Trabajo n. 9918.
- Lam, P.S. (1997) “A Markov switching model of GNP growth with duration dependence”, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Discussion Paper n. 124.
- McCulloch, R.E. y Tsay, R.S. (1994a) “Bayesian analysis of autoregressive time series via the Gibbs sampler”, *Journal of Time Series Analysis*, vol. 15, n. 2, p. 235-250.
- McCulloch y Tsay, R.S. (1994b) “Statistical analysis of economic time series via Markov switching models”, *Journal of Time Series Analysis*, vol. 15, n. 5, p. 523-539.
- Melis, F (1983) “Construcción de indicadores cíclicos mediante ecuaciones en diferencias”, *Estadística Española*, n. 98, p. 45-89.
- Melis, M. (1985) “Caracterización y clasificación de series económicas. Aplicación al sistema de números índices de la producción industrial”, Instituto Nacional de Estadística, Documento Interno.
- Montgomery, A.L., Zarnowitz, V., Tsay, R.S. y Tiao, G.C. (1998) “Forecasting the U.S. unemployment rate”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 93, n. 442, p. 478-493.
- Peña, D. y Box, G.E.P (1987) “Identifying a simplifying structure in time series”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 82, n. 399, p. 836-842.
- Peña, D. y Poncela, P (1999) “Nonstationary dynamic factor analysis”, Universidad Carlos III,

Documento Interno.

- Tiao, G.C. y Tsay, R.S. (1994) "Some advances in non linear and adaptive modeling in time series analysis", *Journal of Forecasting*, vol. 13, p. 109-131.
- Tsay, R.S. (1986) "Nonlinearity tests for time series", *Biometrika*, vol. 72, n. 2, p. 461-466.
- Tsay, R.S. (1989) "Testing and modeling threshold autoregressive processes", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 84, n. 405, p. 231-240.
- Tong, H. (1983) *Threshold models in non-linear time series analysis*, Springer-Verlag, New York, USA.
- Tong, H. (1990) *Non-linear time series: a dynamical system approach*, Clarendon Press, Oxford, UK.